

Pratique Supplémentaire 8

Cette série fait suite aux chapitres 4.6, 4.7, 5.1, 5.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit \mathbb{P}_2 l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 .

1. Décrire tous les sous-espaces de \mathbb{P}_2 (en fonction du nombre d'éléments de leurs bases).
2. Calculer le vecteur de coordonnées du polynôme $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$ dans la base $\mathcal{F} = (1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2)$.

La partie 1. vous propose de réfléchir aux sous-espaces de polynômes de façon géométrique : pensez-y quelques instants et puis lisez la solution.

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. La matrice $m \times n$ définie par $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelée "matrice de rang un". Utiliser la définition du rang pour démontrer que le rang de $\vec{u} \vec{v}^T$ est effectivement 1.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout \vec{b} dans \mathbb{R}^m si et seulement si $A^T\vec{y} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale $\vec{y} = \vec{0}$.

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et l'espace engendré par les lignes de A , puis vérifier que l'affirmation du théorème du rang est bien vérifiée.

Exercice 5

Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
